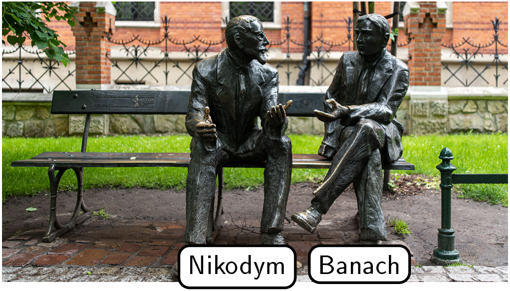
Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 11

Pochodna Radona-Nikodyma



Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą.

Def. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest μ-**całkowalna na zbiorze** $A \in \mathcal{F}$ jeżeli funkcja $\mathbb{1}_A \cdot f$ jest μ-całkowalna i wtedy piszemy

$$\int_A f \, d\mu := \int_X \mathbb{1}_A \cdot f \, d\mu$$

Uw. Jeśli f całkowalna na X, to f całkowalna na każdym $A \in \mathcal{F}$.

Uw. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to trójka $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$, gdzie $\mathcal{F}_A := \{B \cap A : B \in \mathcal{F}\}$ oraz $\mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}$, jest przestrzenią z miarą. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest μ-całkowalna na $A \iff f|_A$ jest μ_A-całkowalna i wtedy $\int_A f \, d\mu = \int_A f|_A \, d\mu_A$.

Stw1. Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ całkowalna na X, oraz $A, B \in \mathcal{F}$ rozłączne

$$\int_{A \sqcup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

A nawet więcej, dla dowolnych parami rozłącznych $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$

$\displaystyle\int_{\coprod_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu$, gdzie szereg jest zbieżny bezwględnie.

Dowód: **(1)** Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ rozłączne, to $\mathbb{1}_{A \sqcup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ i stąd

$$\int_{A \sqcup B} f \, d\mu \overset{def}{=} \int_X \mathbb{1}_{A \sqcup B} \cdot f \, d\mu = \int_X (\mathbb{1}_A f + \mathbb{1}_B f) \, d\mu$$
$$\overset{\text{liniowość}}{=} \int_X \mathbb{1}_A f \, d\mu + \int_X \mathbb{1}_B f \, d\mu \overset{def}{=} \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Niech teraz $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ parami rozłączne.

(2) Załóżmy, że $f \geqslant 0$. Wtedy $\mathbb{1}_{\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n} f \nearrow \mathbb{1}_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f$. Stąd

$$\int_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu \overset{def}{=} \int_X \mathbb{1}_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu \overset{Levi}{=} \lim_{N \to \infty} \int_X \mathbb{1}_{\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n} f \, d\mu$$
$$\overset{\textbf{(1)}}{=} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{A_n} f \, d\mu \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

(3) Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ dowolna całkowalna (na $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$), to

$$\int_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f \, d\mu = \int_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f^+ \, d\mu - \int_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} f^- \, d\mu$$
$$\overset{\textbf{(2)}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^+ \, d\mu - \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^- \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{A_n} f \, d\mu \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| \, d\mu \overset{\textbf{(2)}}{=} \int_{\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n} |f| \, d\mu < \infty \qquad \blacksquare$$

Def. Jeżeli jakaś własność $\pi = \pi(x)$ zachodzi dla wszystkich $x \in X$ poza zbiorem $N \in \mathcal{F}$ o mierze zerowej, tzn. $\mu(N) = 0$, to mówimy, że własność π zachodzi μ-**prawie wszędzie**, w skrócie μ-**pw**.

Stw2. (i) $f = 0$ μ-pw $\Longrightarrow \int_X f\, d\mu = 0$.
(ii) $\int_X |f|\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ μ-pw.

Dowód: (i). $f = 0$ μ-pw oznacza, że $N := \{x : f(x) \neq 0\}$ ma miarę zero. Całka po zbiorze o mierze zerowej wynosi zero. Zatem

$$\int_X f\, d\mu \overset{Stw1}{=} \int_{X\setminus N} f\, d\mu + \int_N f\, d\mu = \int_{X\setminus N} 0\, d\mu + \int_N f\, d\mu = 0 + 0 = 0.$$

(ii). Implikacja '$\Longleftarrow$' wynika z (i). Implikacja '$\Longrightarrow$' wynika z

$$\forall_{c>0} \qquad \mu(\{x : |f(x)| \geqslant c\}) \leqslant \frac{1}{c}\int_X |f|\, d\mu$$

(**nierówność** $\boxed{\text{Markowa}}$)

Dowód nierówności Markowa: Korzystamy z monotoniczności całki

$$\mu(\{x : |f(x)| \geqslant c\}) = \int_X \mathbb{1}_{\{x:|f(x)|\geqslant c\}}\, d\mu = \int_X \tfrac{c}{c}\mathbb{1}_{\{x:|f(x)|\geqslant c\}}\, d\mu$$
$$\leqslant \int_X \frac{|f|}{c}\mathbb{1}_{\{x:|f(x)|\geqslant c\}}\, d\mu \leqslant \int_X \frac{|f|}{c}\, d\mu = \frac{1}{c}\int_X |f|\, d\mu.$$

Rzeczywiście,

$$\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = \mu(\{x : |f(x)| > 0\}) = \mu(\{x : \exists_{k\in\mathbb{N}} |f(x)| > 1/k\})$$

$$= \mu(\textstyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x : |f(x)| > 1/k\}) \overset{\text{ciągłość}}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(\{x : |f(x)| > 1/k\})$$

$$\overset{Markow}{\leqslant} \lim_{k\to\infty} k \textstyle\int_X |f|\, d\mu.$$

Zatem $\int_X |f|\, d\mu = 0 \implies \mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$, czyli $f = 0$ μ-pw. ■

Wn. Jeśli $f : X \to \mathbb{R}$ nieujemna i μ-całkowalna, to wzór

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu, \qquad A \in \mathcal{F}, \tag{†}$$

definiuje miarę (skończoną) na $\mathcal{F}$. Ponadto, miara $\nu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ wyznacza funkcję f jednoznacznie z dokładnością do równości μ-pw.

Def. Jeśli zachodzi (†), to f oznaczamy $\frac{d\nu}{d\mu}$ i nazywamy **gęstością** lub też **pochodną Radona-Nikodyma** miary ν względem miary μ.

Dowód Wniosku: Ze **Stw1** wynika, że $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$ σ-addytywna. Skoro $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f\, d\mu = \int_X \mathbb{1}_\emptyset f\, d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0$, to ν jest miarą.

„Jednoznaczność pochodnej". Niech $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ spełniają $(\dagger)$. Rozbijmy zbiór $N := \{x : f_1(x) \neq f_2(x)\}$ na $N_1 = \{x : f_1(x) > f_2(x)\}$ oraz $N_2 = \{x : f_1(x) < f_2(x)\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}\int_X |f_1 - f_2|\, d\mu &\overset{Stw1}{=} \int_N |f_1 - f_2|\, d\mu \overset{Stw1}{=} \int_{N_1} |f_1 - f_2|\, d\mu + \int_{N_2} |f_1 - f_2|\, d\mu \\ &= \int_{N_1} f_1 - f_2\, d\mu + \int_{N_2} f_2 - f_1\, d\mu \\ &= \int_{N_1} f_1\, d\mu - \int_{N_1} f_2\, d\mu + \int_{N_2} f_2\, d\mu - \int_{N_2} f_1\, d\mu \\ &\overset{(\dagger)}{=} \nu(N_1) - \nu(N_1) + \nu(N_2) - \nu(N_2) = 0.\end{aligned}$$

Zatem $|f_1 - f_2| = 0$ μ-pw na mocy Stw2. Równoważnie $f_1 = f_2$ μ-pw. ■

Prz. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzeń probabilistyczna. Zmienna losowa $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ ma **rozkład ciągły**, gdy miara $\mu_\xi(A) := P(\xi^{-1}(A))$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, posiada gęstość względem miary Lebesgue'a λ. Wtedy

gęstość rozkładu zmiennej ξ = pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\mu_\xi}{d\lambda}$

Pytanie: Kiedy istnieje gęstość (pochodna Radona-Nikodyma)?

Def. Miara ν na $\mathcal{F}$ jest **absolutnie ciągła** względem miary μ jeżeli

$$\forall_{A\in\mathcal{F}} \qquad \mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0,$$

czyli "ν ma więcej zbiorów miary zero niż μ". Piszemy wtedy $\nu \ll \mu$.

Twierdzenie Radona-Nikodyma

Niech μ, ν miary na $(X, \mathcal{F})$ oraz μ jest σ-skończona. Miara ν ma gęstość względem $\mu \iff \nu$ jest absolutnie ciągła względem μ. Tzn.

$$\nu \ll \mu \iff \exists_{f\geqslant 0} \quad \forall_{A\in\mathcal{F}} \quad \nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \boxed{f = \frac{d\nu}{d\mu}}$$

Dowód w łatwą stronę: Jeśli gęstość $f = d\nu/d\mu$ istnieje oraz $\mu(A) = 0$, to $\nu(A) = \int_A f\, d\mu = 0$, bo całka po zbiorze o mierze zerowej wynosi zero. Dowód w trudną stronę dla chętnych.

Prz. Zmienna losowa $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ ma **rozkład ciągły** $\iff \mu_\xi \ll \lambda$
tzn. $P(\xi \in A) = 0$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ o zerowej długości

Miara Lebesgue'a-Stieltjesa λ_F jest zadana przez niemalejąca i lewostronnie ciągłą $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ warunkiem $\forall_{a<b}\ \lambda_F([a,b)) := F(b) - F(a)$.

Tw. $\lambda_F \ll \lambda \iff F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna λ-prawie wszędzie i

$$\forall_{a<b} \qquad \int_{[a,b)} F'(x) d\lambda = F(b) - F(a). \qquad (*)$$

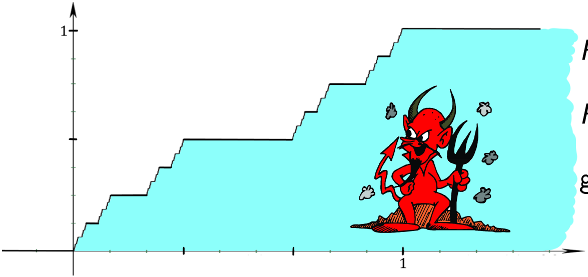
Jeśli to zachodzi, to $F' = \frac{d\lambda_F}{d\lambda}$ λ-pw.

Zwykła pochodna jest pochodną Radona-Nikodyma

Dowód w łatwą stronę: Jeśli $F'(x)$ istnieje λ-prawie wszędzie, to wzór $\nu(A) := \int_A F' d\lambda$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, definiuje miarę na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Jeśli spełniony jest warunek $(*)$, to $\nu = \lambda_F$ na mocy jednoznaczności miary. Wtedy istnieje pochodna Radona-Nikodyma oraz $F' = \frac{d\lambda_F}{d\lambda}$ λ-pw na mocy jednoznaczności gęstości. Dowód w trudną stronę dla chętnych. ■

Uw. Może się zdarzyć, że $F'(x)$ istnieje prawie wszędzie, ale $\lambda_F \not\ll \lambda$

Prz. Diabelska Funkcja Cantora $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, niemalejąca i stała na każdym z przedziałów wyrzuconych ze zbioru Cantora C:



$F|_{(-\infty,0]} \equiv 0,\ F|_{[1,\infty)} \equiv 1,$

$F(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{3^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{2^n},$

gdzie $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{0,2\}$

Wtedy λ_F jest miarą probabilistyczną skupioną na C, tzn. $\lambda_F(C) = 1$. Skoro F stała poza C, to $F'(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Ale $\lambda(C) = 0$, czyli $F'(x) = 0$ λ-pw. Zatem $\lambda_F \not\ll \lambda$ **mimo, iż** $F'(x)$ **istnieje** λ**-pw.**

Stw. (Zamiana miary w całce) Jeśli pochodna Radona-Nikodyma $\frac{d\nu}{d\mu}$ istnieje, to $f \in \mathcal{L}(\nu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \cdot \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{L}(\mu)$ oraz

$$\forall_{f \in \mathcal{L}(\nu)} \qquad \int_X f\, d\nu = \int_X f \cdot \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

Dowód: (1) Jeśli $f \geqslant 0$ prosta, to $f = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i}$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{F}$ rozbicie przestrzeni X. Wtedy

$$\int_X f\, d\nu = \sum_{i=1}^{n} y_i \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_{A_i} \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} y_i \int_X \mathbb{1}_{A_i} \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

$$= \int_X \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{1}_{A_i} \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu = \int_X f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

(2) Jeżeli $f \geqslant 0$ mierzalna, to istnieją funkcje proste $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{F})$ takie, że $0 \leqslant f_n \nearrow f$ i wtedy także $f_n \frac{d\nu}{d\mu} \nearrow f \frac{d\nu}{d\mu}$, bo $\frac{d\nu}{d\mu} \geqslant 0$. Stąd

$$\int_X f\, d\nu \overset{Levi}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\nu \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu \overset{Levi}{=} \int_X f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

(3) Jeżeli f dowolna mierzalna, to

$$f \in \mathcal{L}(\nu) \iff \int_X |f|\, d\nu < \infty \overset{(2)}{\iff} \int_X |f| \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu < \infty$$

$$\iff f \frac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{L}(\mu).$$

Jeśli to zachodzi, to

$$\int_X f\, d\nu = \int_X f^+\, d\nu - \int_X f^-\, d\nu \overset{(2)}{=} \int_X f^+ \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu - \int_X f^- \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu$$

$$= \int_X \left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^+ d\mu - \int_X \left(f \frac{d\nu}{d\mu}\right)^- d\mu = \int_X f \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu. \qquad \blacksquare$$

Prz. Dla zmiennej losowej $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ NWSR:

1. ξ ma rozkład ciągły, tzn. istnieje gęstość f dla μ_ξ
2. $\mu_\xi \ll \lambda$, tzn. rozkład μ_ξ jest absolutnie ciągły względem λ
3. Dystrybuanta F zmiennej ξ jest różniczkowalna λ-prawie wszędzie oraz $\int_{\mathbb{R}} F' \, d\lambda = 1$.

Jeśli te równoważne warunki zachodzą, to

$$F'(x) = \frac{d\mu_\xi}{d\lambda}(x) = f(x), \qquad \lambda\text{-pw.}$$

Ponadto, jeśli $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja borelowska ($\mathcal{B}(\mathbb{R})$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-mierzalna) taka, że $h(\xi)$ ma wartość oczekiwaną (jest całkowalna), to

$$\mathbb{E}(h(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} h \, d\mu_\xi = \int_{\mathbb{R}} h \cdot f \, d\lambda$$

Oznaczenie. Jeśli f jest λ-całkowalna na $[a, b]$, to piszemy

$$\int_a^b f(x) \, dx := \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$